3. lekcija: VJEROJATNOSNI PROSTOR

U deskriptivnoj statistici razmatrali smo skup od N podataka $x_1, x_2 ..., x_n$ s frekvencijama $f_1, f_2 ..., f_n$ (podsjetimo da je zbroj frekvencija N). To znači da se podatak x_1 pojavio f_1 puta, podatak x_2 pojavio se f_2 puta,..., podatak x_i pojavio se f_i puta. Te smo podatke dobili mjerenjem nekog statističkog obilježja jedne populacije (na primjer količine kemikalije u staklenki). Nismo mjerili na cijeloj populaciji već uzorku (od N elemenata) koji smo slučajno izabrali iz populacije, koja je, u pravilu, puno veća.. Temeljno je pitanje što možemo zaključiti o statističkom obilježju populacije na osnovi mjerenja uzorka. Naravno, ako je N mali, a brojnost populacije velika, naš zaključak neće biti vrlo pouzdan.
Vidimo da je za fi od N elemenata uzorka izmjerena vrijednost x_i (za svaku vrijednost indeksa i=1,2,...,n). Ako je N dovoljno velik onda možemo predpostaviti da bi se podatci u populaciji pojavljivali u omjeru bliskom onomu u kojem se pojavljuju u uzorku.
Na primjer, neka je N=1 000 i neka je f_5 =28, što znači da se podatak x_5 u uzorku pojavio 28 puta. Omjer pojavljivanja je 28/1000, što je u postotcima 2.8% ili, izraženo u decimalnom brojevima od 0 do 1, to je 0.028. Sad predpostavimo da populacija ima 20 000 članova, a kako je 2.8% od toga 560, možemo vjerovati da bi se za odprilike 560 članova populacije pojavio podatak x_5 (odnosno njemu vrlo blizak ako je riječ o mjerenju, koje je uvijek približno). Taj smo broj mogli dobiti i množenjem brojeva 0.028 i 20 000.
U ovom smo se razmatranju dotakli **teorije vjerojatnosti**, koja je teoretska podloga za ovakva zaključivanja i u ovoj lekciji ćemo uvesti osnovne pojmove te teorije.

Skup ishoda

U teoriji vjerojatnosti razmatraju se događaji koji se mogu, ali ne moraju dogoditi. Takvi se događaji zovu **slučajnim događajima**. Dakle, slučajni događaj jest događaj koji ne možemo predvidjeti. Takvi se događaji događaju u nekim pokusima ili pri opažanjima nekih prirodnih pojava.

Primjer 1. Bacamo dvije kocke označene brojevima od 1 do 6 i registriramo brojeve koji su se pojavili na gornjim stranama kocaka. Zanima nas događaj: *zbroj brojeva na bačenim kockama jest 9*.

Događaj koji razmatramo u tom pokusu je slučajan (zbroj može biti svaki broj od 2 do 12 i ne možemo predvidjeti hoće li zbroj biti 9 ili neće). Od sada ćemo razmatrati samo slučajne događaje i zvat ćemo ih, jednostavno, događajima i označavati velikim slovima abecede: A,B,C, …

Evo nekoliko tipičnih pokusa u kojima nastaju (slučajni) događaji:

1) *Bacanje kocke čije su strane označene brojevima od 1 do 6* (od sada ćemo samo govoriti: *bacanje kocke*).
2) *Slučajno biranje jedne karte iz skupa od 32 karte*
3) *Slučajno biranje troznamenkastog broja.*
4) *Slučajno biranje dvaju troznamenkastih brojeva.*

5) *Slučajno biranje dvojice kandidata iz skupa od 5 kandidata od kojih će jedan biti predsjednik, a drugi potpresjednik.*
6) *Bacanje novčića dok ne ispadne pismo* (jedna strana novčića zove se **pismo** oznaka *P*, a druga **glava** – oznaka *G*).
7) *Mjerenje vemena trajanja kemijske reakcije.*
8) *Mjerenje dnevne temperature.*

Razmotrimo pokus bacanja kocke jedan put i registriramo broj koji se pojavio na gornjoj strani kocke. Možemo govoriti o različitim događajima u tom pokusu, primjerice,
A: *ispao je broj 6,*
B: ispao je broj 4,
C: ispao je broj 2,
D: ispao je paran broj,
E: nije ispao broj 2.
Složit ćete se da su događaji A, B, C jednostavni, a da su događaji D, E složeni. Naime, za događanje događaja A postoji samo po jedna mogućnost, slično je za događaje B, C, za događanje događaja D postoje tri mogućnosti (da se dogodi bilo koji od događaja A, B, C), dok za događanje događaja E postoji pet mogućnosti. Jednostavne događaje u nekom pokusu zvat ćemo **ishodima** (**elementarnim događajima**).
Uočite sljedeće: **svaki se događaj sastoji od ishoda**. Vrlo je važno da u pokusu koji razmatramo znamo odrediti skup ishoda.

Primjer 2. Odredimo skup ishoda za pokuse 1-8 navedene prije.

1. **Bacanje kocke jedan put**. U tom pokusu ima šest ishoda; možemo ih označiti brojevima 1, 2, 3, 4, 5, 6.

2. **Biranje karte iz skupa od 32 karte**. Navedimo nekoliko ishoda u tom pokusu.
A: as pik, B: as tref, C: sedmica karo, D: kralj herc, E: dečko herc, F: dama herc. Vidimo da u tom pokusu ima ishoda koliko i karata, dakle ima 32 ishoda.

3. **Biranje troznamenkastog broja**. Navedimo nekoliko ishoda (ne označavajući ih slovima): 123, 108, 801, 213. Zaključujemo da u tom pokusu ima ishoda koliko i troznamenkastih brojeva, dakle ima 900 ishoda.

4. **Biranje dvaju troznamenkastih brojeva**. Navedimo nekoliko ishoda u tom pokusu.
A: izabrali smo 123 i 108,
B: izabrali smo 234 i 432,
C: izabrali smo 333 i 555.
Naravno da je svejedno izabrali mi brojeve 123 i 108 ili izabrali brojeve 108 i 123 (bitno je da smo oba puta odabrali ista dva troznamenkasta broja, a ne kojega smo od njih prije izabrali). Zato svaki ishod možemo smatrati **dvočlanim skupom** (koji je podskup skupa svih troznamenkastih brojeva – kojih ima 900). Takvih podskupova ima $\binom{900}{2}$.

5. **Biranje predsjednika i potpredsjednika od 5 kandidata**. Da bismo opisali skup ishoda označimo kandidate malim slovima abecede: a, b, c, d, e. Navedimo nekoliko ishoda u tom pokusu.
   A: *a* predsjednik, *c* potpredsjednik
   B: *c* predsjednik, *a* potpredsjednik

C: *d* predsjednik, *e* potpredsjednik.
Uočite da su A, C različiti ishodi iako u oba slučaja sudjeluju iste osobe (naime nije svejedno tko će biti predsjednik, a tko potpredsjednik). Događaje A,B,C možemo zapisati i kraće:
A: ac ;
B: ca;
C: de.
Zaključujemo da svaki ishod **možemo jednoznačno zapisati šifrom** koja se sastoji od dvaju slova (izabranih među slovima a, b, c, d, e). Šifru čitamo tako da je **prvo slovo šifre predsjednik**, a **drugo potpredsjednik**,
primjerice šifra *ec* znači da je *e* predsjednik, a *c* potpredsjednik.
Uočite dva važna svojstva tih šifara.
(i) slova šifre su različita.
(ii) bitno je mjesto slova u šifri (pri zamjeni slova šifra se mijenja).
Svojstvo (ii) u matematici imaju **uređeni parovi**. Dakle svaku takvu šifru, tj. svaki ishod u tom pokusu možemo smatrati uređenim parom kojemu su koordinate različite i iz skupa su $\{a, b, c, d, e\}$.
Uređene parove obično pišemo u oblim zagradama, a koordinate odvajamo zarezom. Tako bi šifru *ab* mogli pisati kao uređeni par *(a,b)*, međutim, radi uštede vremena i prostora pisat ćemo bez zagrada i bez zareza. Ispišimo sve ishode:
ab, ba, ac, ca, ad, da, ae, ea, bc, cb, bd, db, be, eb, cd, dc, ce, ec, de, ed.
Vidimo da ih ima 20. Do tog smo broja mogli doći i ovakvim razmišljanjem:
Prvu koordinatu smo mogli izabrati na 5 načina, a drugu (jer mora biti različita od prve) na 4 načina (bez obzira koju smo prvu izabrali). Zato ukupno ima $5 \cdot 4 = 20$ takvih uređenih parova.
Drugim rječima, predsjednika možemo izabrati na 5 način, nakon toga potpredsjednika na 4 načina (bez obzira kojega smo izabrali za predsjednika).

Napomena. Pravilo koje smo koristili pri računanju broja šifara u gornjem primjeru zove se **osnovnim teoremom prebrojavanja**. Njegov se smisao vidi iz tog primjera. Bitno je da se uoči da se svaki sljedeći korak može učiniti na određeni broj načina, bez obzira koji su bili prethodni koraci. Ako bi, recimo, broj načina na koji možemo učiniti 3. korak ovisio o tome koji smo 2. korak ili koji smo 1. korak izabrali, onda ne bismo mogli koristiti to pravilo.

6. **Bacanje novčića dok ne ispadne pismo**. Evo prijedloga nekoliko ishoda u tom pokusu.
   A: pismo je ispalo u prvom bacanju.
   B: pismo je ispalo u drugom bacanju.
   C: pismo je ispalo u desetom bacanju.

Ako događanje pisma označimo slovom *P*, a događanje glave slovom *G*, onda događaje A, B, C možemo zapisati i ovako:
A: P;
B: GP;
C: GGGGGGGGGP.
Pritom GP znači da je u prvom bacanju ispala glava, a drugom pismo, što je isto kao i da je pismo ispalo u drugom bacanju. Slično, GGGP jest zapis događaja *pismo je ispalo tek četvrti put*. Koliko ima takvih zapisa toliko u tom pokusu ima ishoda, dakle ima ih beskonačno mnogo. Po tome se taj pokus razlikuje od prethodnih. Treba uočiti da je taj skup ishoda prebrojiv, tj. može se postaviti u niz: P, GP, GGP, GGGP, GGGGP, GGGGGP, …
Uočimo još jednu razliku od između ovih ishoda i onih prije. Ovi ishodi nisu ravnopravni, što se vidi i po dužini zapisa. Poslije ćemo vidjeti kako to utječe na vjerojatnost.

7. **Mjerenje vremena trajanja kemijske reakcije**. Tu je ishod svako moguće vrijeme trajanja te kemijske reakcije i može se označiti pozitivnim realnim brojem. Ovisno o pokusu to može biti bilo koji pozitivni realni broj; zato je skup ishoda neki interval u skupu realnih pozitivnih brojeva. S donje je strane taj interval omeđen nulom (vrijeme trajanja kemijske reakcije ne može biti negativno). S gornje strane taj je interval neodređen (koliko najviše može trajati neka kemijska reakcija?). Taj se pokus bitno razlikuje od prethodnih. Naime, u prethodnim je pokusima skup ishoda bio konačan ili prebrojiv, a tu je neprebrojiv.

Treba uočiti da smo vrijeme trajanja kemijske operacije shvatili u teoretskom smislu. U praksi, vrijeme trajanja ovisi o mjernoj skali. Ako, na primjer, mjerimo mjernim instrumentom koji registrira stotinku sekunde (a manje vremenske vrijednosti ne registrira), onda bi skup ishoda bio dio teoretskog intervala, kojeg čine čvorišta podjele tog intervala na stotinke.

8. **Mjerenje dnevne temperature**. Pretpostavimo da je riječ o mjerenju temperature u Celzijevim stupnjevima na slučajno odabranom mjestu na Zemlji, u slučajno odabrano vrijeme. Skup ishoda tog pokusa jest neki interval u skupu realnih brojeva (kao i u prethodnom pokusu). Taj je interval omeđen s donje strane brojem –273 (apsolutna nula), dok je međa s gornje strane neodređena (kao i u 7. pokusu).

Dakle, ishodi u nekom pokusu čine skup (**skup ishoda**, koji ćemo označavati slovom S).
Treba uočiti tri mogućnosti s obzirom na broj ishoda.

I. skup ishoda je konačan.
II. skup ishoda je beskonačan, ali prebrojiv.
III. skup ishoda je neprebrojiv.

U teriji vjerojatnosti i u praksi pojavljuju se sve tri mogućnosti i sve su važne (to se vidi i iz navedenih primjera). Napomenimo da je, što se vjerojatnosti tiče, II bliže I, nego III. Najvažniji primjeri III. mogućnosti jesu kad je skup ishoda neki interval u skupu realnih brojeva (oni nastaju u pokusima u kojima se nešto mjeri i takve ćemo ponajviše razmatrati).

Ishodi su jednostavni događaji; općenito događaj je sastavljen od jednog ili više ishoda. Zato **svaki događaj možemo interpretirati kao neki podskup skupa ishoda** S.
Pri takvoj su interpretaciji ishodi **jednočlani događaji**.
Skup svih ishoda S također je događaj; taj događaj zovemo **sigurnim događajem**.
Pokazuje se da je razumno uvesti i **nemogući događaj**; taj događaj interpretiran je **praznim skupom** (oznaka Ø).

Primjer 3. Bacamo kocku jedan put. Zapišimo pomoću skupova događaje:
S (sigurni događaj);
A: ispao je broj veći od dva;
B: ispao je paran broj;
C: ispao je broj veći od 3, a manji od 5;
D: nije ispao neparan broj;
E: ispao je broj 4.

$S = \{1,2,3,4,5,6\}$
$A = \{3,4,5,6\}$
$B = \{2,4,6\}$

$C = \{4\}$
$D = \{2,4,6\}$
$E = \{4\}$.
Treba uočiti da se događaji A, D sastoje od istih ishoda; kažemo da su ta dva događaja **jednaka** i pišemo A = D. Slično, C = E. Definicija jednakosti događaja u skladu je s definicijom jednakosti skupova.

Zaključujemo:
1. Događaj je podskup skupa svih ishoda.
2. Dva su događaja jednaka ako se sastoje od istih ishoda.

Ako je skup ishoda konačan ili beskonačan prebrojiv, onda se u teoriji vjerojatnosti razmatraju **svi podskupovi skupa ishoda kao događaji**.
Ako je skup ishoda beskonačan neprebrojiv, pokazuje se da **nije dobro prihvatiti sve podskupove skupa ishoda kao događaje**, već samo neke. Ta se, za mnoge iznenađujuća činjenica, može točno matematički obrazložiti; mi to u ovoj knjizi nećemo učiniti. Napomenimo da su u pokusima u kojima je skup ishoda neki interval skupa realnih brojeva (takvi nas u pravilu zanimaju), **najvažniji i u praksi najzanimljiviji** događaji upravo oni koji se skupovno **mogu interpretirati kao podintervali** skupa ishoda. Dobro je znati da se oni prihvaćaju kao događaji u teoriji vjerojatnosti. Na primjer, u pokusu mjerenja temperature, obično nas zanimaju događaji poput:
A: temperatura je iznad nule.
B: temperatura je manja od 30º.
C: temperatura je između 4º i 5.5º.

Broj dogadjaja u nekom pokusu je obično vrlo velik. Na primjer,
ako ima *n* ishoda onda ima 2^n događaja.
Dobro je što u teoriji vjerojatnosti **nije važan popis svih događaja** u nekom pokusu, već samo neki zanimljivi događaji i broj ishoda koji ih čine.
Ako u pokusu ima beskonačno mnogo, ali prebrojivo ishoda, tada, kao i u slučaju konačnog broja ishoda, svaki podskup skupa ishoda reprezentira neki događaj. Tada, naravno, ima beskonačno mnogo svih događaja, a može se dokazati da ih ima neprebrojivo mnogo. Kao i u konačnom slučaju, zanimat će nas samo neki događaji, a ne svi.
Na primjer, kod bacanja novčića dok ne ispadne glava, obično nas zanimaju događaji poput:
A: pokus je trajao 5 bacanja,
B: pokus je trajao bar 5 bacanja,
C: pokus je trajao najviše 5 bacanja,
D: pokus je trajao između 5 i 10 bacanja,
E: pokus je trajao paran broj bacanja.
Uočite da se događaji A,C,D sastoje od konačno mnogo, a događaji B,E od beskonačno mnogo ishoda.

Umnožak i zbroj događaja

Kao što u običnom govoru složene rečenice sastavljamo iz jednostavnih povezujući ih veznicima, tako i u teoriji vjerojatnosti, od jednostavnih dogadjaja formiramo složene povezujući ih veznikom *i*, i *ili* : to su **umnožak** (**produkt**) i **zbroj** (**suma**) dogadjaja.
Kraće, neka su A, B dva dogadjaja. Tada je:

$A{\cdot}B$ = umnožak događaja A, B (dogodio se i događaj A i događaj B; dogodila su se oba od događaja A,B), možemo pisati i A*i*B.
$A{+}B$ = zbroj događaja A,B (dogodio se događaj A ili događaj B; dogodio se barem jedan od događaja A, B). Možemo pisati i A*ili*B
Treba uočiti da su zbrajanje, odnosno množenje **binarne operacije** na događajima; one dvama događajima pridružuju novi događaj, složen od njih, njihov zbroj, odnosno njihov umnožak.

Suprotni događaj.

Nijekom (negacijom) neke rečenice **protuslovi se** tvrdnji koju ta rečenica izriče. Slično se tvori suprotni dogadjaj $\bar{A}$ dogadjaja A, on se dogadja upravo tada kad se A ne dogadja.
Kraće,
$\bar{A}$: suprotni događaj događaja A (nije se dogodio A).

Treba uočiti da je nijekanje događaja **unarna operacija** na događajima; ona svakom događaju pridružuje njemu suprotni događaj.

Primjer 4. Zapišimo sljedeće događaje:
a) *dogodio se A, ali se nije dogodio B*,
b) *dogodio se točno jedan od događaja A, B*,
c) *nije se dogodio nijedan od događaja A, B*,
d) *bar jedan od događaja A,B nije se dogodio*,
e) *dogodio se najviše jedan od događaja A,B*.

a) A $\overline{B}$
b) $A\overline{B}+B\overline{A}$
c) $\overline{A}\,\overline{B}$
d) $\overline{A}+\overline{B}$
e) $\overline{A}\,\overline{B}+A\overline{B}+\overline{A}B$.
Uočite da se dogadjaji u d) i e) poklapaju i to obrazložite.

Operacije na dogadjajima imaju zanimljiva svojstva, poput svojstava logičkih operacija, koja su osnova rada kompjutora. Ovdje ih nećemo sustavno navoditi.

Primjer 4. Izrecimo riječima sljedeća svojstva operacija na događajima:
a) $\overline{\overline{A}}=A$
b) $A+\overline{A}=S$
c) $A\overline{A}=$ Ø
d) DeMorgnova pravila.
   (i) $\overline{A+B}=\overline{A}\cdot\overline{B}$
   (ii) $\overline{AB}=\overline{A}+\overline{B}$

a) Događaj: *nije istina da se nije dogodio A* jednak je događaju *A*. Možemo reći i ovako: suprotni događaj suprotnog događaja jednak je početnom događaju. To u stvari znači da su događaji A i $\overline{A}$ međusobno suprotni ($\overline{A}$ suprotan je događaju A, dok je A suprotan događaju $\overline{A}$).

b) Za svaki događaj vrijedi da se dogodio ili nije.
c) Međusobno suprotni događaji ne mogu se istovremeno dogoditi
d) (i) događaj: *nije istina da se dogodio A ili B* jednak je događaju: *nije se dogodio A niti se dogodio B.*
   (ii) događaj: *nije istina da se dogodio A i B* jednak je događaju: *nije se dogodio A ili se nije dogodio B.*

Skup događaja u nekom pokusu skupa s operacijama zbrajanja, množenja i nijekanja zovemo algebra događaja.

Uobičajeno je algebru događaja označavati oznakom $(\underline{A},+,\cdot,-)$, gdje $\underline{A}$ označava skup svih događaja. Treba uočiti da ima više različitih algebra događaja (koje su pridružene različitim pokusima), ali da svaka od njih ima gore napisana svojstva.

Vidjeli smo da se dva međusobno suprotna događaja ne mogu istovremeno dogoditi. To znači: ako se dogodio A, onda se nije dogodio $\overline{A}$ i obratno, ako se dogodio $\overline{A}$, onda se nije dogodio A. Općenito:
ako se dva događaja ne mogu istovremeno dogoditi, onda kažemo da se događaji isključuju
Može se reći i ovako:
Dva se događaja isključuju ako je njihov umnožak nemogući događaj.

Vjerojatnosni prostor

Kako smo rekli (slučajni) događaj se može , ali ne mora dogoditi.
Vjerojatnost događaja jest **brojčana mjera izgleda** (šanse) da se taj događaj dogodi.
Neka je, na primjer u jednoj kutiji 50 crvenih, 20 bijelih i 30 plavih kuglica (koje se ne razlikuju osim po boji) i neka se pokus sastoji od slučajnog biranja jedne kuglice. Označimo:
A: izvučena je kuglica crvena
B: izvučena je kuglica bijela
C: izvučena je kuglica plava.
U pokusu se može dogoditi bilo koji od događaja A, B, C. Intuitivno je jasno da ti događaji **nemaju jednake izglede** (najveći izgled ima događaj A jer crvenih kuglica ima najviše). Mnogi će, upitani da izgled tih događaja izraze brojčano, odgovoriti da događaj A ima šansu (izgled) 50% (jer crvene kuglice čine 50% kuglica), da događaj B ima šansu 20%, a događaj C šansu 30%.
Ako se analizira zaključak o izgledu izvlačenja crvene kuglice, ustanovit ćemo da se on zasniva na sljedećim činjenicama:
(i) ukupan je broj kuglica 100,
(ii) svaka kuglica ima jednak izgled da bude izvučena (to je smisao uvjeta da se kuglica bira slučajno),
(iii) crvenih kuglica ima 50.
Dakle, u 50 od 100 mogućnosti, izvučena će kuglica biti crvena, pa je izgled izvlačenja crvene kuglice 50%, odnosno $\frac{50}{100}$.
Taj model zaključivanja provest ćemo općenito, samo što nećemo govoriti o izgledu događaja, već o vjerojatnosti događaja i što vjerojatnost nećemo zapisivati u obliku postotka, već u obliku razlomka (odnosno decimalna broja).

Neka u nekom pokusu ima n ishoda i neka su svi ishodi međusobno ravnopravni (imaju međusobno jednake izglede da se dogode). Pretpostavimo da se događaj A sastoji od m ishoda. Tada je **vjerojatnost događanja događaja** A jednaka $\frac{m}{n}$. To kraće pišemo kao:

$$p(A) = \frac{m}{n}$$

(p je početno slovo latinske riječi *probabilis*).

Primjer 5. Bacamo kocku jedan put. Izračunajmo vjerojatnost događaja.
A: ispao je paran broj,
B: ispao je broj veći od dva.

Zapišimo događaj *A* kao podskup skupa ishoda: A $=\{2,4,6\}$. Tu je m=3, n=6, pa je p(A)=3/6.
Slično je, B = $\{3,4,5,6\}$, pa je p(B) = 4/6.

Za ovakvo rješenje predpostavili smo da bacamo homogenu kocku, tj. Zamišljali smo idealni pokus. Taj bi se idealni pokus mogao formulirati ovako:
Slučajno biramo jedan od brojeva 1,2,3,4,5,6.
Postavlja se pitanje može li se ostvariti takav pokus. Evo nekoliko prijedloga:
1. Bacamo homogenu kocku označenu brojevima 1,2,3,4,5,6.
2. U kutiji je 6 kuglica istih polumjera i istih masa označenih brojevima od 1 do 6. Slučajno vadimo jednu kuglicu.
3. Šest listića označeno je brojevima od 1 do 6 i zatvoreno u 6 kuverata. Biramo slučajno jednu od kuverata.

Treba imati na umu da je svaki od tih pokusa samo približno rješenje. Za ove (različite) pokuse kažemo da su **ekvivalentni**. Sa stanovišta vjerojatnosti, oni se ne razlikuju.

Primjer 6. Kolika je vjerojatnost da od dviju slučajno odabarnih karata iz kupa od 32 karte budu.
a) dva asa
b) dva herca.

Označimo
A: izabrana su dva asa,
B: izabrana su dva herca.
Da bismo odredili vjerojatnost treba odrediti broj ishoda, a da bismo odredili broj ishoda treba znati što su ishodi u tom pokusu. Ishod u tom pokusu jest svaki dvočlani podskup skupa od 32 karte. Zato ishoda ima $\binom{32}{2}$. Budući da je biranje karata slučajno, ishodi su međusobno ravnopravni. Događaj *A* sastoji se od 6 ishoda:
A = { {as pik, as karo}, {as pik, as herc}, {as pik, as tref}, {as karo, as herc}, {as karo, as tref}, {as herc, as tref} }.
Broj ishoda od kojih se sastoji događaj *A* mogli smo izračunati i kao $\binom{4}{2}$, jer je to broj dvočlanih podskupova četveročlana skupa. Dakle,

$$p(A) = \frac{6}{\binom{32}{2}}.$$

Slično se dobije

$$P(B) = \frac{\binom{8}{2}}{\binom{32}{2}}$$ jer ukupno ima 8 herčeva.

Svojstva vjerojatnosti događaja.

Iz definicije vjerojatnosti kao omjera svih povoljnih mogućnost i svih mogućnosti proizlaze sljedeća svojstva vjerojatnosti *p* događaja.

1. P(S) = 1 (ukupna vjerojatnost jednaka je 1)
2. p(A+B) = p(A) + p(B), ako se A, B isključuju

Ako u 2. umjesto *B* stavimo $\bar{A}$, dobijemo
p(A+ $\bar{A}$)= p(A)+p($\bar{A}$), a kako je A+ $\bar{A}$ =S i p(S)=1, dobijemo
p(A)+p($\bar{A}$)=1, što pišemo i kao
3. p($\bar{A}$)=1-p(A)
Ta se formula zove **formulom vjerojatnosti suprotnog događaja**
i lako se može izravno izvesti.
Ako se u tu formulu stavi A=S, onda je, $\bar{A}$ =Ø, pa je
4. P(Ø) = 0.
Ta se formula može izravno dobiti i iz definicije vjerojatnosti jer se nemogući događaj sastoji od 0 ishoda.

Postavlja se pitanje vjerojatnosti sume događaja za dva događaja koja se nužno ne isključuju.
Neka je:
card S = n,
card A = m,
card B = k
card AB = r.
Zato je card (A+B)=m+k-r, pa je
p(A+B) =(m+k-r)/n
= m/n+k/n-r/n
= p(A)+p(B)-p(AB), dakle,

5. p(A+B)=p(A)+p(B)-p(AB).

Ta se formula zove **formulom zbroja dvaju događaja**. Ona povezuje vjerojatnosti dvaju događaja, te vjerojatnosti njihova zbroja i umnoška. Ako znamo 3 od tih vjerojatnosti, onda pomoću te formule možemo izračunati i četvrtu.
Vjerojatnosnim prostorom zovemo algebru događaja <u>A</u> skupa s funkcijom vjerojatnosti
p: <u>A</u> ….[0,1] koja ima svojstva 1,-5.

Kad ima beskonačno mnogo ishoda treba dodati još neka svojstva.
Može se pokazati da se iz svojstava 1. i 2. mogu izvesti svojstva 3., 4. i 5.

U sljedećim ćemo primjerima ilustrirati uporabu nekih svojstava vjerojatnosti i nekih svojstava operacija na algebri događaja.

Primjer 7. Iz kupa od 32 karte slučajno izvlačimo 2 karte. Odredite vjerojatnost da bude:

a) izvučen je točno jedan as.
b) izvučen je točno jedan kralj.
c) izvučeni su as i kralj.
d) izvučen je as ili kralj.
e) nije izvučen as ili nije izvučen kralj.

Označimo:
A: među izvučenim kartama je točno jedan as,
B: među izvučenim je kartama točno jedan kralj.
Da bismo izračunali vjerojatnost navedenih događaja treba uočiti da se A sastoji od dviju komponenata: asa i neke karte koja nije as. As se bira na 4 načina, a karta koja nije as na 28 načina, bez obzira koji je as izabran. Zato je:

$$p(A)=4\cdot 28/\binom{32}{2}$$

$p(B)=p(A)$
Događaj: *izvučen je as i kralj* jest umnožak događaja A,B. Slično kao do sada zaključujemo da je:

$$p(AB)=4\cdot 4/\binom{32}{2}$$

d) događaj: *izvučen je as ili kralj* jest zbroj događaja A,B. Koristeći se formulom za vjerojatnost zbroja događaja dobivamo:

$$p(A+B) = p(A)+p(B)-p(AB)$$
$$=128/\binom{32}{2}$$

e) događaj: *nije izvučen as ili nije izvučen kralj* jest zbroj događaja $\overline{A}$, $\overline{B}$. Koristeći se DeMorganovom formulom i formulom vjerojatnosti suprotnog događaja dobivamo:

f) $p(\overline{A}+\overline{B})= p(\overline{AB}) =1-p(AB)$

$$=1 - 16/\binom{32}{2}$$

Svojstva vjerojatnosti (1.-5.) na algebri događaja izveli smo uz pretpostavku da je skup ishoda konačan i da su ishodi međusobno ravnopravni.

Statistička definicija vjerojatnosti

Što znači da je pri bacanju novčića jedan put, vjerojatnost da ispadne P jednaka 1/2? Znači li to da će se pri 2 bacanja novčića jednom dogoditi P. Naravno da ne znači. Znači li to da će se pri 20 bacanja novčića 10 puta dogoditi P? Ne znači ni to. Pokusom se možemo uvjeriti da će se pri 200 bacanja novčića otprilike 100 puta dogoditi P (a ujedno i G).

Evo rezultata broja pisama u nekoliko pokusa bacanja novčića po 200 puta. Zapisali smo i međurezultate nakon 20, 50, 100 bacanja.

	20 bacanja	50 bacanja	100 bacanja	200 bacanja
1.pokus	8	22	54	103
2.pokus	12	26	56	109
3.pokus	8	21	45	94
4.pokus	11	24	51	106
5.pokus	8	21	44	89
6.pokus	9	27	47	93
7.pokus	12	29	54	110
8. pokus	10	27	54	103

Izračunajmo omjer broja pojavljivanja pisma i ukupnog broja bacanja u tim pokusima.

1.pokus 103/200 = 0.515

2.pokus 109/200 = 0.545

3.pokus 94/200 = 0.47

4.pokus 106/200 = 0.53

5.pokus 89/200 = 0.445

6.pokus 93/200 = 0.465

7.pokus 110/200 = 0.55

8.pokus 103/200 = 0.515

Treba uočiti da se omjeri grupiraju oko broja 0.5, tj. da je pri svakom od 200 bacanja novčića, omjer približno jednak 0.5.
Ukupno, tj. u 1 600 bacanja, događaj *P* dogodio se 807 puta. Pripadni je omjer:
807/1 600 = 0.504375.
Taj je rezultat na dvije decimale jednak broju 0.5.
Ta nas razmatranja navode na **statističku definiciju vjerojatnosti** kao **graničnu vrijednost relativnih frekvencija** događaja. Pojasnimo to.
Uočimo u nekom pokusu događaj *A*. Da bismo statistički odredili vjerojatnost tog događaja ponavljajmo izvođenje tog pokusa. Ako se pri *n* izvođenja tog pokusa događaj *A* dogodio *m* puta, onda se *m* zove **frekvencija**, a kvocijent *m/n* **relativna frekvencija** događaja *A* (za *n* izvođenja pokusa).

Statistička vjerojatnost događaja *A* jest granična vrijednost reletivnih frekvencija tog događaja kad broj izvođenja pokusa teži k beskionačnosti. Kraće:
p(A) = lim m/n.
Naravno, nema matematičkih razloga koji bi bezuvjetno garantirali da će relativne frekvencije imati limes. Pokusi, poput onog s novčićem, uvjeravaju nas u to. Vidimo da se relativne frekvencije grupiraju oko teoretske vjerojatnosti.

Statistička vjerojatnost nije samo alternativa za taoretsku vjerojatnost. U mnogim se pokusima i ne može doći do vjerojatnosti osim tako. Na primjer, ako želimo odrediti vjerojatnost da se atom radija raspadne u vremenu *t*. Naravno da se tada može govoriti samo o približnoj vjerojatnosti. Također, točnost se rezultata povećava ako se broj izvođenja pokusa (odnosno broj mjerenja) povećava.

Uvjetna vjerojatnost. Nezavisni događaji

Ako saznamo neku informaciju o pokusu, može se dogoditi da se vjerojatnosti događaja promijene. To ćemo pokazati na primjerima.

Primjer 8. Kolika je vjerojatnost da je pri bacanju kocke ispao broj 6 ako znamo da je ispao paran broj?

Označimo:
A: ispao je broj 6.
B: ispao je paran broj.
Naravno, p(A) = 1/6 ; p(B) = 3/6 .
Međutim ako znamo da je ispao paran broj, nema više 6 nego samo 3 mogućnosti (ishoda): ispao je broj 2 ili broj 4 ili broj 6. Kako su te 3 mogućnosti ravnopravne, zaključujemo da je sad vjerojatnost da ispadne 6 jednaka 1/3. To se zapisuje kao:
p(A|B) = 1/3
i čita kao: *vjerojatnost da se dogodi A ako se dogodio B je 1/3* (odnosno *uvjetna vjerojatnost događaja A uvjetno o B jednaka je* 1/3).
Vidimo da se u tom primjeru uvjetna vjerojatnost događaja razlikuje od njegove izvorne vjerojatnosti.

Dakle, ako znamo da se dogodio događaj *B*, onda se skup ishoda mjenja. Taj novi skup ishoda jest upravo skup ishoda koji čine događaj *B*. Tada događaj *A* čine samo oni njegovi ishodi koji su ujedno i u *B*, tj. oni koji su u *AB*. Koristeći se time izvodimo:
p(A|B) = card (AB)/card B
= (card(AB)/cardS)/(cardB/card S)
= p(AB)/p(B).
Tom je formulom uvjetna vjerojatnost izražena pomoću izvorne vjerojatnosti. Treba uočiti da taj izvod vrijedi za pokus u kojemu je skup ishoda konačan i u kojemu su ishodi međusobno ravnopravni.
Do iste bi se formule došlo ako bismo imali pokus u kojemu se skup ishoda *S* interpretira kao interval realnih brojeva, kao podskup ravnine ili kao podskup prostora. Oznakom *m* označimo duljinu, površinu, odnosno obujam. Tada izvodimo:
p(A|B) = m(AB)/m(B)
= (m(AB)/m(S))/(m(B)/m(S))
= p(AB)/p(B).
Dakle, uvijek dolazimo do iste formule:

$$p(A|B) = p(AB)/p(B)$$

To je **formula uvjetne vjerojatnosti**.
Ta se formula može napisati i u obliku:

$$p(AB) = p(A|B)p(B)$$

Ta se formula zove **formulom umnoška (produktnom formulom)**.

U navedenom primjeru lako smo prihvatili da se vjerojatnost ispadanja broja 6 promijenila kad smo saznali da je ispao paran broj. Međutim, često okolnosti u kojima se pojavljuje uvjetna vjerojatnost znaju, barem na prvi pogled, izgledati paradoksalno. Navedimo jedan takav slučaj.

Zadatak 1. Trgovački je putnik došao u posjet bračnom paru. U razgovoru s njima saznao je da imaju dvoje djece. U to je u sobu ušao dječak.

(i) Kolika je vjerojatnost da je i drugo dijete dječak?

(ii) U nastavku razgovora trgovački je putnik saznao da je drugo dijete mlađe. Kolika je sad vjerojatnost da je drugo dijete dječak?

Prije nego prijeđete na rješavanje ovog problema, pogledajmo jedan drugi primjer, analogan ovome, ali nešto jasniji.

Primjer 9. Pokus se sastoji od bacanja dviju kocaka.

(i) Pretpostavimo da smo saznali da je na prvoj kocki bio broj 6. Kolika je vjerojatnost da je i na drugoj kocki bio broj 6?

(ii) Pretpostavimo da smo saznali da je na jednoj od kocaka bio broj 6. Kolika je vjerojatnost da je na drugoj kocki bio 6?

Razmotrimo ovaj primjer (radi provjere svoga osjećaja za problem, pokušajte odgovoriti je li rezultat u oba slučaja isti).
U prvom slučaju znamo da je na prvoj kocki bio rezultat 6. Intuitivno nam je jasno da ta činjenica **ne može utjecati** na vjerojatnost događaja da na drugoj kocki bude 6 (što znači da vjerojatnost treba ostati 1/6). Tome i sličnim okolnostima više ćemo se posvetiti u sljedećoj jedinici, a sada tvrdnju i obrazložimo.
Ako je na prvoj kocki bio 6, onda su mogle nastati sljedećih 6, međusobno ravnopravnih, mogućnosti: 61, 62, 63, 64, 65, 66 , gdje ovi zapisi imaju uobičajeno značenje (na primjer 63 znači da je na prvoj kocki bio 6, a na drugoj 3). Samo u jednoj od tih mogućnosti i na drugoj je kocki bio 6 (to je mogućnost 66). Zato je vjerojatnost da je i na drugoj kocki bio 6 jednaka 1/6 (kao da prvu kocku nismo ni bacali).

U drugom slučaju (koji se **samo naizgled ne razlikuje** od prvoga) znamo da je na jednoj od kocaka bio 6 (ali ne znamo na kojoj). Sad ima 11 međusobno ravnopravnih mogućnosti: 61,62,63,64,65,66,56,46,36,26,16, ali sad ima šest mogućnosti u kojima je 6 na drugoj kocki. Zato je vjerojatnost da na drugoj kocki bude 6 jednaka 6/11. Vidimo da se vjerojatnosti bitno razlikuju.

Sad pokušajte riješiti zadatak 1 i sljedeće zadatke.

Zadatak 2. Od triju kutija dvije su prazne, a u jednoj je nagrada. Natjecatelj slučajno odabire jednu od kutija za koju misli da je u njoj nagrada. Prije nego je otvori netko pogleda u one preostale dvije kutije, pokaže jednu koja je prazna i ponudi natjecatelju da zamijeni svoju kutiju s onom preostalom. Isplati li se to natjecatelju? Izračunajte relevantne vjerojatnosti.

Zadatak 3. Bomba se deaktivira tako da se prerežu tri točno odredjene žice, a da se četvrta ne prereže. Osoba W koja je prisiljena na to da pokuša deaktivirati bombu izabere slučajno jednu od žica koju neće prerezati (dok ostale tri hoće).
(a) Nakon slučajnog odabira jedne od preostalih triju žica, W je prereže i bomba ne eksplodira. Ima li W razloga promijeniti svoj odabir žice koju je na početku odabrao da je ne reže?
(b) Razgledavanjem triju žica koje je odlučio prerezati W uoči da je jednu pregrizao miš. Ima li sad W razloga promijeniti svoj početni odabir?

U nekoliko smo prethodnih primjera vidjeli da vjerojatnost nekog događaja ovisi o tome je li se dogodio neki drugi događaj.

Ako je $p(A|B) \neq p(B)$, onda kažemo da je događaj A zavisan o događaju B.
Ako je $p(A|B) = p(B)$, onda kažemo da je događaj A nezavisan o događaju B.

Izvedimo drugu formulaciju nezavisnosti dogadjaja. Ako u formulu nezavisnosti
$p(A|B) = p(A)$
uvrstimo formulu za uvjetnu vjerojatnost $p(AB)/p(B) = p(A)$, dobit ćemo
$$p(AB) = p(A)p(B) \qquad (*)$$
Formula (*) zove se **produktnom formulom** za nezavisne događaje.
Ta se formula može shvatiti kao:

Dva su događaja nezavisna ako je vjerojatnost njihova umnoška jednak umnošku njihovih vjerojatnosti.

Mnogi, bez razloga, miješaju nezavisnost i isključivost događaja. Zato treba upamtiti sljedeće:
Dva se događaja isključuju, ako pojavljivanje jednog onemogućuje pojavljivanje drugoga. U toj se definiciji ne pojavljuje vjerojatnost, ali vrijedi: ako se događaji isključuju, onda je vjerojatnost njihova zbroja jednaka zbroju njihovih vjerojatnosti: $p(A+B) = p(A) + p(B)$.

S druge strane, nezavisnost događaja ne može se definirati bez vjerojatnosti i izražava se formulom: $p(AB) = p(A)p(B)$. Ako se dva događaja isključuju onda ne mogu biti nezavisna (osim ako je jedan od njih nemogući događaj).

U sljedećem ćemo se primjeru koristiti i disjunktnošću i nezasvisnošću.

Primjer 10. Bacamo kocku tri puta. Odredimo vjerojatnost da ispane:
a) bar jednom 6,
b) točno jednom 6.

Označimo:
A : ispao je bar jednom broj 6,
Ai : i-ti je put ispao broj 6 (i = 1,2,3),
B: točno je jednom ispao 6.
a) Uočimo da je

$\overline{A}$ =ni jednom nije bio 6 = $\overline{A}\,1\,\overline{A}\,2\,\overline{A}\,3$. Ad je

p(A) = 1 – p($\overline{A}$)

= 1- p($\overline{A_1}\ \overline{A_2}\ \overline{A_3}$)

= 1- p($\overline{A}_1$)p($\overline{A}_2$)p($\overline{A}_3$) iz nezavisnost Ai slijedi nezavisnost supr. događaja.

= 1- 5/6 5/6 5/6

= $1 - (\frac{5}{6})^3$

b) B= $A_1\overline{A_2}\,\overline{A_3} + \overline{A_1}A_2\overline{A_3} + \overline{A_1}\,\overline{A_2}A_3$

$$p(B) = p(\ A_1\overline{A_2}\,\overline{A_3} + \overline{A_1}A_2\overline{A_3} + \overline{A_1}\,\overline{A_2}A_3\ )$$

$= p(A_1\overline{A_2}\,\overline{A_3}) + p(\overline{A_1}A_2\overline{A_3}) + p(\overline{A_1}\,\overline{A_2}A_3)$ zbog disjunktnosti

$= p(A_1)p(\overline{A_2})p(\overline{A_3}) + p(\overline{A_1})p(A_2)p(\overline{A_3}) + p(\overline{A_1})p(\overline{A_2})p(A_3)$ zbog nezavisnosti

= (1/6) (5/6)(5/6) + (5/6) (1/6) (5/6) + (5/6) (5/6) (1/6)

= 3 (1/6) (5/6) (5/6).

Trebalo je uočiti da su sva tri pribrojnika jednaka iako predočuju vjerojatnosti različitih događaja. U svakom od njih jednom se u umnošku pojavljuje 1/6 jer jednom ispada 6, a dva se puta pojavljuje 5/6 jer dva puta ne ispada 6.

U sljedećem ćemo primjeru uz pomoć nezavisnosti izračunati vjerojatnost nekih događaja u pokusu u kojemu ima beskonačno mnogo, ali prebrojivo ishoda.

Primjer 11. Bacamo kocku dok ne ispadne broj 6. Odredimo vjerojatnost da bude:

a) točno 3 bacanja,
b) bar 3 bacanja,
c) više od 10, a manje od 20 bacanja.

a) p(točno tri bacanja) = p(prva dva puta nije 6, treći put 6)

= p(prva dva puta nije 6)p(treći put 6) zbog nezavisnosti

= (5/6) (5/6) (1/6)

b) p(bar 3 bacanja) = 1 – p(najviše 2 bacanja)

= 1 – p(1 bacanje ili 2 bacanja)

= 1 – p(1 bacanje) – p(2 bacanja) zbog disjunktnosti

= 1 – 1/6 – p(prvi put nije 6, drugi put 6)

= 1 – 1/6 – p(prvi put nije 6)p(drugi put 6) zbog nezavisnosti

= 1 – 1/6 – (5/6) (1/6)

c) $\left(\frac{5}{6}\right)^{10}\frac{1}{6} + \ldots + \left(\frac{5}{6}\right)^{18}\frac{1}{6}$.

Zadatak 4. Izračunajte taj zbroj koristeći se formulom za zbroj članova geometrijskog reda.